Herleitung der Euler-Gleichung der Mechanik

Für eine beliebige Beziehung in einem Inertialsystem (im Folgenden Basiskoordinatensystem genannt und gekennzeihnet mit Index B) soll gelten:

$$ {}^{B}\mathbf{M} = {}^{B}\dot{\mathbf{L}} \tag{1} $$

Mit $\mathbf{M}$ als Drehmoment und $\mathbf{L}$als Drehimpuls ist dies z.B. der Drehimpulserhaltungssatz.

Diese Gleichung soll nun durch Koordinatentransformation in ein mitbewegtes Objektkoordinatensystem (Index K) transformiert werden. Mit der Rotationsmatrix von B nach K mit der Bezeichnung ${}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B}$ gilt:

$$ {}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\mathbf{M} $$

Hier wird jetzt Gleichung (1) eingesetzt:

$$ {}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\dot{\mathbf{L}} $$

$\mathbf{L}$ soll aber in K ausgedrückt werden:

$$ {}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left({}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} \cdot {}^{K}\mathbf{L} \right) $$

Jetzt wird die Produktregel angewendet:

$$ \begin{aligned} {}^{K}\mathbf{M} &= {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot \left({}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} \cdot {}^{K}\dot{\mathbf{L}} + {}^{B}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{K} \cdot {}^{K}\mathbf{L} \right) \\ &= {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} \cdot {}^{K}\dot{\mathbf{L}} + {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{K} \cdot {}^{K}\mathbf{L} \end{aligned} $$

Mit ${}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} = \underline{\mathbf{1}}$ (Hin- und Rücktransformation heben sich auf):

$$ {}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\dot{\mathbf{L}} + {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{K} \cdot {}^{K}\mathbf{L} $$

Mit der Definition ${}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}} := {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{K}$ ergibt sich

$$ {}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\dot{\mathbf{L}} + {}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}} \cdot {}^{K}\mathbf{L} \tag{2} $$

Für ${}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}}$ lassen sich einige Eigenschaften ableiten:

$$ \underline{\mathbf{0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{\mathbf{1}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left({}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} \right) = {}^{K}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{B} \cdot {}^{B}\underline{\mathbf{R}}_{K} + {}^{K}\underline{\mathbf{R}}_{B} \cdot {}^{B}\dot{\underline{\mathbf{R}}}_{K} $$

Mit ${}^K\underline{\mathbf{R}}_B^{-1} = {}^K\underline{\mathbf{R}}_B^{\mathrm{T}} = {}^B\underline{\mathbf{R}}_K$ und der allgemeingültigen Gleichung für Matrizen $\underline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \left(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}}$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
{}^K\underline{\mathbf{\Omega}} = {}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot {}^B\dot{\underline{\mathbf{R}}}_K &= -{}^K\dot{\underline{\mathbf{R}}}_B \cdot {}^B\underline{\mathbf{R}}_K \\
&= -{}^B\dot{\underline{\mathbf{R}}}_K^{\mathrm{T}} \cdot {}^K\underline{\mathbf{R}}_B^{\mathrm{T}} \\
&= -\left({}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot {}^B\dot{\underline{\mathbf{R}}}_K\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

Die Matrix ${}^K\underline{\mathbf{\Omega}}$ ist damit schiefsymmetrisch mit noch drei freien Parametern a, b, c:

$${}^K\underline{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Eigenschaft findet man durch Ansetzen des Differentialquotienten:

$${}^K\underline{\mathbf{\Omega}} = {}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot {}^B\dot{\underline{\mathbf{R}}}_K = {}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot \frac{{}^B\underline{\mathbf{R}}_K(t+\mathrm{d}t) - {}^B\underline{\mathbf{R}}_K(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Die Matrix ${}^B\underline{\mathbf{R}}_K(t+\mathrm{d}t)$ kann als eine Kombination aus ${}^B\underline{\mathbf{R}}_K(t)$ und Rotation um eine Achse dargestellt werden. Diese Achse läßt sich durch einen Rotationsgeschwindigkeitsvektor ${}^K\boldsymbol{\omega}$ beschreiben.

Die entsprechende Rotationsmatrix, die um eine beliebige Achse rotiert, wird mit $\underline{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\beta})$ bezeichnet. Der Parameter $\boldsymbol{\beta}$ gibt die Achse (Vektorrichtung) und den Drehwinkel (Betrag) an.

Gleichung (3) wird damit zu

$$\begin{aligned}
{}^K\underline{\mathbf{\Omega}} &= {}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot \frac{{}^B\underline{\mathbf{R}}_K \cdot \underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t) - {}^B\underline{\mathbf{R}}_K}{\mathrm{d}t} \\
&= {}^K\underline{\mathbf{R}}_B \cdot {}^B\underline{\mathbf{R}}_K \cdot \frac{\underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t) - \underline{\mathbf{1}}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t) - \underline{\mathbf{1}}}{\mathrm{d}t} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Wird der Rotationsvektor ${}^K\boldsymbol{\omega}$ mit der Matrix ${}^K\underline{\mathbf{\Omega}}$ multipliziert, so ergibt das als Ergebnis den Nullvektor. Hierbei wird die Eigenschaft verwendet, daß ein Vektor, der parallel zur Drehachse liegt, durch diese Drehung unbeeinflußt bleibt, was für $\underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t)$ und ${}^K\boldsymbol{\omega}$ per Definition offensichtlich erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
{}^K\underline{\mathbf{\Omega}} \cdot {}^K\boldsymbol{\omega} &= \frac{\underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t) - \underline{\mathbf{1}}}{\mathrm{d}t} \cdot {}^K\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{\underline{\mathbf{R}}({}^K\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t) \cdot {}^K\boldsymbol{\omega} - \underline{\mathbf{1}} \cdot {}^K\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{{}^K\boldsymbol{\omega} - {}^K\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \\
{}^K\underline{\mathbf{\Omega}} \cdot {}^K\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die drei Parameter von ${}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}}$ bestimmen:

$$
{}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^{K}\omega_z & {}^{K}\omega_y \\ {}^{K}\omega_z & 0 & -{}^{K}\omega_x \\ -{}^{K}\omega_y & {}^{K}\omega_x & 0 \end{pmatrix}
$$

Wie man leicht sieht, entspricht damit die Gleichung (2) der Anwendung des Kreuzproduktes, was zu der üblichen Form der Euler-Gleichung führt:

$$
{}^{K}\mathbf{M} = {}^{K}\dot{\mathbf{L}} + {}^{K}\boldsymbol{\omega} \times {}^{K}\mathbf{L} \tag{5}
$$

Alternativ kann für die Herleitung von ${}^{K}\underline{\mathbf{\Omega}}$ in Gleichung (4) auch einfach die Rotationsmatrix $\underline{\mathbf{R}}({}^{K}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t)$ explizit eingesetzt werden, was zu demselben Ergebnis führt.

Da in der Herleitung der Euler-Gleichung nirgends speziell Bezug auf den Anwendungsfall der Drehimpulserhaltung genommen wurde, gilt die Beziehung für die zeitliche Ableitung im mitbewegten Koordinatensystem genauso für jeden beliebigen anderen Vektor.

$\square$